

非线性转子—SFD 支承系统的分叉

哈尔滨工业大学 赵永辉* 王 莉 邹经湘

【摘要】 利用 Newton-Fox 打靶法和伪弧长连续算法计算了非线性转子—SFD 支承系统的周期解。基于多变量 Floquet 理论,分析了该系统的分叉和稳定性。基于 Poincaré 映射得到了系统的分支图。结果表明,转子系统的运动呈现倍周期分叉、切分叉等非线性动力学现象。

主题词: 转子系统 打靶法 分岔 稳定性

分类号: V231.96

1 引 言

按照非线性动力学理论^[1],分叉则意味着结构不稳定。因此研究非线性转子—SFD 支承系统的分叉行为对提高航空发动机运转的稳定性具有十分重要的意义。本文利用 Newton-Fox^[2]打靶法来计算非线性转子—SFD 支承系统的周期解。由于打靶过程所需求解的非线性代数方程与原系统的阶相同,因此比谐波平衡法^[3~5]导得的高阶系统更容易求解,也在一定程度上克服了直接数值积分法^[6]难于获得不稳定解的缺点。此外,采用伪弧长连续算法^[7]来连续计算周期解。基于多变量 Floquet^[8]理论分析了上述系统的分叉和稳定性。转子系统的运动呈现倍周期分叉、切分叉等非线性动力学现象。本文方法完全适用于实际的多盘转子系统。

2 Newton-Fox 打靶法

考虑如下非自治系统的边值问题:

$$\dot{x} = f[t, x(t), \lambda] \quad (1)$$

这里 $x(t)$ 表示状态变量; $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ 为向量函数; λ 为分叉参数; T 为响应的最小周期。这里 E 为 $n \times n$ 单位矩阵, $F = -E$ 。考虑与方程(1)相关的初值问题:

$$u = f(t, u, \lambda), \quad u(0) = s \quad (s \in R^n) \quad (2)$$

将方程(2)的解表示为 $u(s, \lambda, t)$, 寻找 s 使得:

$$\mathcal{Q}(s, \lambda) = Eu(s, \lambda, 0) + Fu(s, \lambda, T) = 0 \quad (3)$$

显然,如果满足方程(3),则 s 便是周期解曲线上的一点。因此,将 s 作为初始条件,在周期 T 内积分方程(2)就可获得周期解。如果找不到这样的解 s ,则应将 T 增加整数倍直到发现这样的解 s 为止。Newton-Fox 打靶算法可描述如下:

初始猜测一个解 s^0 , 然后迭代: $s^{i+1} = s^i + \Delta s^i$

这里 Δs^i 可通过求解下面的线性代数方程求得:

$$Q(s^i, \lambda_0)(\Delta s^i) = -\mathcal{Q}(s^i, \lambda_0) \quad (4)$$

这里 λ_0 为某一分叉参数值, $n \times n$ 矩阵 Q 表示 $\mathcal{Q}(s, \lambda)$ 对 s 的 Jacobian 矩阵, 可写为:

$$Q(s, \lambda_0) = \left[\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial s} \right] = [E + FW(S, \lambda, T)] \quad (5)$$

这里 $n \times n$ 矩阵 $W(s, \lambda, t)$ 可通过下面的变分方程组求得:

$$\dot{W} = A(t, s, \lambda) W, \quad W(s, \lambda, 0) = I \quad (6)$$

这里 I 为 $n \times n$ 单位矩阵. $n \times n$ 矩阵 A 可表为:

$$A(t, s, \lambda) = (\partial f / \partial u)[t, u(s, \lambda, t), \lambda] \quad (7)$$

事实上, s^i 对于给定的, 我们可同时积分方程 (2) 和 (6), 从而得到 $W(s^i, \lambda_0, T)$ 和 $\mathcal{Q}(s^i, \lambda_0)$, 然后求解方程 (4) 得到 Δs^i , 再计算 s^{i+1} . 如果满足一定精度条件, 则迭代终止.

3 伪弧长连续算法

如果我们已经获得 $\lambda = \lambda$ 时的精确解 s_j , 伪弧长连续算法则是处理如何寻找 $\lambda = \lambda_{i+1}$ 时的解 s_{j+1} 的问题. 如果 (s_0, λ_0) 是解曲线 Γ 上一点, $(\dot{s}_0, \dot{\lambda}_0)$ 为 Γ 在该点处的单位切线, 定义平面方程:

$$N(s, \lambda, \Delta L) = (\dot{s}_0)^T (s - s_0) + \dot{\lambda}_0 (\lambda - \lambda_0) - \Delta L = 0 \quad (8)$$

这个平面垂直于切线 $(\dot{s}_0, \dot{\lambda}_0)$, 并与 (s_0, λ_0) 的距离为 ΔL . 如果 Γ 的曲率不太大的话, 这个平面将与曲线 Γ 相交. 这样我们可同时求解方程 (3) 和 (8) 得到解 (s, λ) . 应用 Newton 法, 有:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{Q}' \\ \dot{s}_0 & \dot{\lambda}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathcal{Q} \\ N \end{bmatrix} \quad (9)$$

这里 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(s^i, \lambda^i)$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'(s^i, \lambda^i)$, 迭代过程为:

$$s^{i+1} = s^i + \Delta s^i, \quad \lambda^{i+1} = \lambda^i + \Delta \lambda^i \quad (10)$$

对于每一次迭代, 可在周期端点处得到 $\mathcal{Q}$ 的值:

$$\mathcal{Q} \dot{\lambda} = FZ(T) \quad (11)$$

这里 F 已在方程 (1) 中定义, $Z(t) = \partial u / \partial \lambda$ 为下面变分方程的解:

$$\dot{Z} = AZ + R, \quad Z(0) = 0 \quad (12)$$

这里 A 已在方程 (6) 中定义. $R = \partial f / \partial \lambda_0$. 方程 (9) 中, $\dot{s}_0$ 和 $\dot{\lambda}_0$ 可由下式得到:

$$\dot{s}_0 = a \dot{\lambda}_0, \quad \dot{\lambda}_0 = a \quad (13)$$

这里 $\dot{\lambda}_0$ 和 a , 满足: $\mathcal{Q} \dot{\lambda}_0 = -\mathcal{Q}'$, $a = \pm \frac{1}{1 + \|\dot{\lambda}_0\|^2}$ (14)

方程 (14) 中, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(s_0, \lambda_0)$, $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}'(s_0, \lambda_0)$. 根据文献 [7], 如果 $(\dot{s}_{-1}, \dot{\lambda}_{-1})$ 为上一个单位切向量, 那么可根据下面的表达式选择 a 的符号:

$$a[(\dot{s}_{-1})^T \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_{-1}] > 0 \quad (15)$$

4 多变量 Floquet 理论

多变量 Floquet 理论是决定周期解稳定性和分叉的有力工具. 矩阵 $W(s, \lambda, T)$ 的特征值称为 Floquet 乘子. 按照 Floquet 理论, 周期解存在三种类型的分叉, 如图 1 所示. 如果所有的 Floquet 乘子都位于复平面上的单位圆内, 则周期解是稳定的; 当主要乘子以

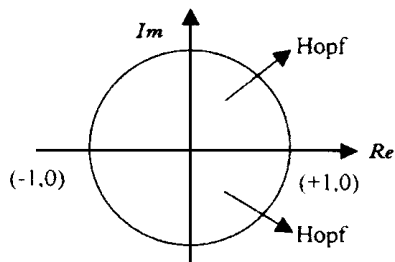


图 1 三种分叉模式

(+1, 0) 穿出单位圆时, 则周期解失稳, 发生切分叉; 当主要乘子以 (-1, 0) 穿出单位圆时, 发生倍周期分叉; 当一对主要 *Floquet* 乘子以复数共轭形式穿出单位圆时, 周期解发生二次 *Hopf* 分叉, 进入准周期运动, 还可进一步分叉而导致混沌运动。

5 系统运动方程

非线性转子-SFD 系统如图 2 所示。系统的无量纲运动方程如下:

$$\ddot{X} = \frac{B}{S} \bar{F}_X + U \cos \tau - \frac{1}{S^2} (X - X_s) \quad (16a)$$

$$\ddot{Y} = \frac{B}{S} \bar{F}_Y + U \sin \tau - \frac{1}{S^2} (Y - Y_s) \quad (16b)$$

这里: $B = \mu R L^3 / m C^3 \omega$ 为轴承参数, μ 为滑油粘度, R 为阻尼器半径, L 为阻尼器长度, C 为阻尼器径向间隙, m 为转子质量的一半, $\omega_b = \sqrt{K/m}$, K 为弹性支承刚度。 $U = e/C$, e 为不平衡偏心距, $S = \omega/\omega_b$ 为转速比, X_s, Y_s 为阻尼器轴承外环中心初始静变形位置。基于短轴承假设^[9], 无量纲油膜反力 $\bar{F}_X, \bar{F}_Y$ 可写为:

$$\bar{F}_X = - \frac{1}{X^2 + Y^2} [X(\epsilon \dot{\varphi}^{11} + \dot{\epsilon}^{02}) - Y(\epsilon \dot{\varphi}^{20} + \dot{\epsilon}^{11})] \quad (17a)$$

$$\bar{F}_Y = - \frac{1}{X^2 + Y^2} [Y(\epsilon \dot{\varphi}^{11} + \dot{\epsilon}^{02}) + X(\epsilon \dot{\varphi}^{20} + \dot{\epsilon}^{11})] \quad (17b)$$

这里: $I^{mn} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^m \theta \cos^n \theta}{1 + \epsilon \cos \theta} d\theta$, $\theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{-Y}{\epsilon \varphi} \right)$, $\varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$, $\epsilon = \frac{1}{X^2 + Y^2}$

6 分叉与稳定性

根据方程(16), *Poincaré* 映射可定义为:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}, \tau) | \tau = kT, k = 1, 2, \dots\} \\ &= \{(X_1, X_2, X_3, X_4, \tau) | \tau = kT, k = 1, 2, \dots\} \end{aligned} \quad (18)$$

这里 X_1, X_2, X_3, X_4 为系统状态变量, T 为响应的最小周期。*Poincaré* 截面上的 n 个离散点表示周期- n 运动; 闭曲线表示准周期运动; 对于混沌运动则需利用最大 *Lyapunov* 指数来判定。取转速为分叉参数, 初始变形只考虑重力的影响。取 $(X_s, Y_s) = (0, -0.7)$ 。系统的分支见图 3。

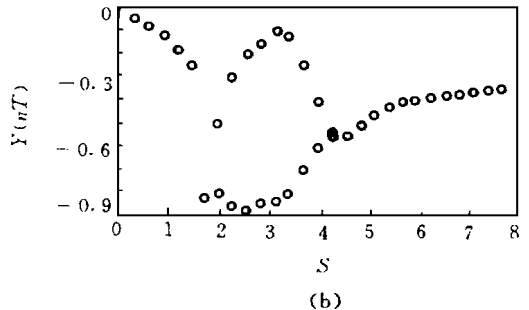
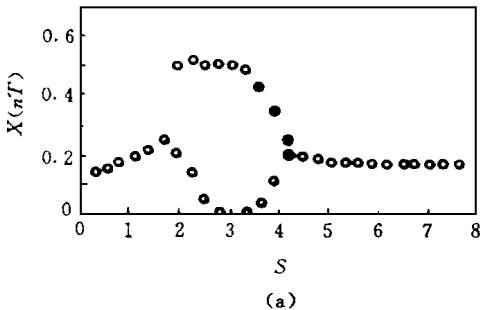


图 3 分叉图

由图 3 可见, $S \approx 0.2$ 时, 这时有一 *Floquet* 乘子以 (-1, 0) 穿过单位圆, 周期解失稳, 系统

发生倍周期分叉,变为周期-2运动。周期-2轨迹如图4所示。 $S \approx 2.28$ 时,这时有一 *Floquet*

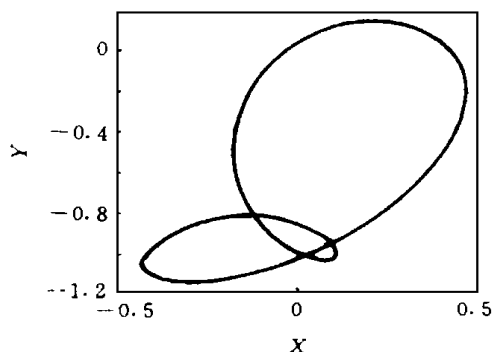


图4 周期-2运动

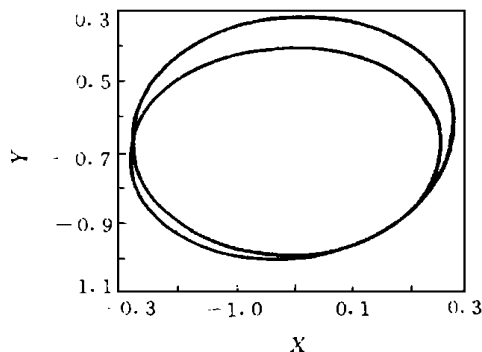


图5 轨迹相切现象

乘以 $(+1, 0)$ 穿过单位圆,系统发生切分叉。切分叉时仍然维持原来的周期-2运动,只是这时的周期解是不稳定的。切分叉一般表现为轨迹的相切现象,如图5所示。 $S > 4.3$ 之后,系统在较宽的转速范围内维持周期-1运动。对无初始变形情况仿真,在图3所示的转速范围没有发现分叉现象,这说明阻尼器轴颈不对中容易发生分叉而失稳。

7 结 论

Newton-Fox 打靶法和伪弧长连续算法在计算非线性系统的周期解问题上是有效的。基于 *Floquet* 理论和 *Poincaré* 映射讨论了周期解的分叉和稳定性。阻尼器轴颈不对中,容易导致系统发生分叉。这对系统的稳定运行是不利的。

参 考 文 献

- 1 Golubisky M, et al. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1984
- 2 Keller H B. *Numerical Analysis and Control of Bifurcation Problems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1991, 1(4): 745-752
- 3 Zhao Y J. Subharmonic and Quasi-Periodic Motions of an Eccentric Squeeze Film Damper- Mounted Rigid Rotor. Journal of Vibration and Acoustics, 1994, 116: 357-363
- 4 陈予恕. 非线性转子-轴承系统的分叉. 振动工程学报, 1996, 9(3): 266-275
- 5 Kim Y B, Noah S T. Response and Bifurcation Analysis of MDOF Rotor System with a Strong Nonlinearity, Nonlinear Dynamics, 1991, 2: 215-234
- 6 Zhu Changsheng. Nonsynchronous Responses and Bistable Operations of a Rotor Supported on Uncentralised Squeeze Film Damper. ICVE'98, Volume II, Northeastern University Press, 1998: 438-442
- 7 Keller H B. *Lecture Notes on Numerical Methods in Bifurcation Problems*. Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1987
- 8 Iooss G, Joseph D D. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, New York, 1990
- 9 晏砺堂. 航空燃气轮机振动和减振. 北京: 国防工业出版社, 1991

(责任编辑 王震华)

of the fractional dimension of time- serial vs the parameter is obtained, which can identify critical bifurcated parameters of nonlinear dynamical system quite well.

Key Words Rotor system Bifurcation Parameters Recognition

BIFURCATIONS OF NONLINEAR ROTOR—SFD SUPPORTING SYSTEM

Zhao Yonghui and Zou Jingxiang

(*Dept. of Astronautics and Mechanics of Harbin Institute of technology, Harbin 150001*)

ABSTRACT Periodic solutions of nonlinear rotor- SFD supporting system are calculated by using Newton- Fox shooting method and pseudo- arc length continuation procedure. According to multi- variable Floquet theory, bifurcations and stability of the system are analyzed. Bifurcation diagrams of the system are obtained from on Poincaré map. The results show that the motion of the rotor system undergoes nonlinear dynamics phenomena, such as period doubling bifurcation, tangent bifurcation and so on.

Key Words Rotor system Shooting method Bifurcation Stability

RESEARCH ON UNIFIED VISCOPLASTIC DAMAGE RELATIONSHIP OF ANISOTROPIC MATERIALS

Zhou Baizhuo

(*State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment
Dalian University of Technology, Dalian 116023*)

Yang Shijie

(*Aeroengine Research Institute, Shengyang 110015*)

Nie Jingxu

(*4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083*)

ABSTRACT With the help of combining continuum damage mechanics and viscoplastic theory, the unified viscoplastic constitutive model^[1] developed by authors is modified. A unified viscoplastic constitutive damage model of anisotropic materials under the alternative effect of creep and fatigue load is established. The creep and fatigue property as well as their damages for monocrystalline alloys DD3 have been predicted according to this model. The durability and damage under the alternative effect of the creep and fatigue load for the material under cyclic loading. The predicted results are compared with test data.

Key Words Anisotropic material Monocrystal Creep Fatigue Damage

AN EXPERIMENTAL STUDY ON LOW CYCLE FATIGUE LIFE OF 1ST TURBINE DISK IN AEROENGINE

Gong Mengxian, Huang Qingdong, Xiao Yuxiang

Gu Yuanxing, Zhao Xingming, Cao Fenglan

(*Gas Turbine Establishment 610500*)

ABSTRACT According to the standard load cycle spectrum, a stress analysis of 1st turbine disk in an aeroengine was completed to determine its useful life. The places, where the centre hole came across the pin holes, were the dangerous points (so called check